ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

19. Iatsenko, T. O. (2023) Ukrainska literatura : pidruch. dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Ukrainian Literature : a textbook for the 6th grade of secondary education institutions] / T. O. Yatsenko, V. I. Pakharenko, O. A. Slyzhuk. K. : Vydavnychyi dim «Osvita». 256 c. [in Ukrainian].

Отримано редакцією 28.01.2026 р.
Прийнято редакцією 28.02.2026 р.
Опубліковано 6.04.2026 р.

УДК 378:37.011.3-051:51]004.67
DOI: 10.31376/2410-0897-2026-1-60-53-61

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ МОДЕЛЕЙ GEOGEBRA 3D ЯК ЗАСОБУ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОНЦЕПТУАЛЬНОГО РОЗУМІННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Кугай Наталія Василівна
доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри фізико-математичної освіти та інформатики
Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка
e-mail: nkuhai@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-9193-1956

У статті розглянуто проблему формування в здобувачів вищої освіти концептуального розуміння диференціального числення функцій кількох змінних. Обґрунтовано доцільність упровадження інтерактивних моделей GeoGebra 3D як інструменту візуалізації абстрактних математичних понять. Розроблено та описано методику використання серії інтерактивних аплетів для дослідження ліній рівня поверхні, існування границь функції кількох змінних у точці, інтерпретації геометричного змісту частинних похідних та аналізу локальних екстремумів функцій із параметром. Особливу увагу приділено алгоритмам створення динамічних моделей, які забезпечують зворотний зв'язок та стимулюють дослідницьку діяльність студентів. Доведено, що поєднання аналітичних методів з інтерактивною візуалізацією сприяє подоланню формалізму в знаннях та забезпечує усвідомлене засвоєння сутності математичних об'єктів.

Ключові слова: *GeoGebra 3D, інтерактивні моделі, диференціальне числення, функції кількох змінних, концептуальне розуміння, динамічна візуалізація, методика навчання математики, математична абстракція.*

Постановка проблеми. Інтеграція цифрових технологій у вищу освіту з кожним роком стає поширенішою, особливо в дисциплінах, для яких необхідне складне концептуальне розуміння та динамічна візуалізація, зокрема в математичному аналізі. Ця дисципліна є підґрунтям практично всіх галузей сучасної науки. Однак застосування тільки традиційних методів навчання часто призводить до значних труднощів для здобувачів освіти в розумінні сутності абстрактних понять математичного аналізу [1] через відсутність їх динамічної візуалізації. Відтак існує значний розрив між формальним, символічним представленням об'єктів математичного аналізу та їх інтуїтивним розумінням, що перешкоджає глибокому засвоєнню матеріалу та його застосуванню. Актуальним є питання необхідності впровадження інноваційних інструментів, що сприятимуть динамічній візуалізації абстрактних ідеальних понять математичного аналізу як ефективного засобу для подолання зазначеного розриву шляхом покращення концептуального розуміння абстрактних математичних ідей і понять [2]. Застосування цифрових симуляторів у навчанні сприяє інтерактивній візуалізації і надає дидактичну підтримку, що підвищує розуміння здобувачами освіти змісту навчальної дисципліни, їхню мотивацію, самоефективність й успішність [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різні аспекти впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у процес навчання математичних дисциплін та формування цифрової компетентності викладачів і здобувачів освіти висвітлено в працях В. Бикова, М. Жалдака, О. Кузьмінської, Н. Морзе, О. Овчарук, О. Семеніхіної, С. Семерікова, О. Співаковського, О. Спіріна, Ю. Триуса та інших.

Теоретико-методологічні основи використання технологій візуалізації під час підготовки майбутніх учителів математики визначено й обґрунтовано О. Семеніхіною [4], застосування засобів візуалізації під час вивчення математичних дисциплін продемонстровано й аргументовано в наукових працях О. Семеніхіної й Н. Білошапки [5], Т. Коваль і О. Бесклінської [6] та багатьох інших.

Значна увага науковців приділена ефективності використання віртуальних симуляторів у STEM-освіті (одним з основних складників якої є математична освіта). Автори статті [7], розглядаючи віртуальні симулятори як інтерактивні комп'ютерні програми, що імітують реальні або модельні процеси, явища, ситуації, обґрунтовують низку переваг застосування симуляторів порівняно з традиційними методами навчання, визначають критерії оцінювання та добору симуляторів. У дослідженнях, включених до огляду [8], акцентовано на позитивному впливі симуляцій на ставлення та залученість здобувачів освіти. Встановлено, що застосування симуляцій послідовно підвищувало інтерес та мотивацію студентів, часто роблячи абстрактні поняття більш доступними та захопливими.

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

Водночас, попри значну кількість теоретичних напрацювань, питання сучасного методичного забезпечення вивчення конкретних розділів математичного аналізу засобами 3D-моделювання потребує подальшої деталізації, зокрема в контексті посилення концептуального розуміння складних математичних об'єктів.

Мета статті: обґрунтувати доцільність застосування інтерактивних моделей під час вивчення диференціального числення функцій кількох змінних, описати алгоритми розробки таких моделей у середовищі GeoGebra 3D та розкрити методику їх використання для забезпечення концептуального розуміння здобувачами сутності математичних об'єктів.

Наукова новизна дослідження полягає в розробленні алгоритмів створення інтерактивних моделей у середовищі GeoGebra 3D та обґрунтуванні методики їх використання для подолання епістемологічних перешкод [9] у процесі засвоєння абстрактних понять диференціального числення функцій кількох змінних.

Виклад основного матеріалу. Під час вивчення змістового модуля «Диференціальне числення функції кількох змінних» як метод пізнання застосовують аналогію. Так, означення функції, границі й неперервності функції кількох змінних аналогічні до відповідних означень для функції однієї змінної, для знаходження частинних похідних застосовують ті самі правила й таблицю, що й для функції однієї змінної [10]. Водночас варто пам'ятати, що застосування аналогії без критичного аналізу призводить до ризику «сліпого» копіювання властивостей функцій однієї змінної і неправомірного перенесення їх на функції кількох змінних. Окрім того, під час переходу від вивчення функції однієї змінної до вивчення функції кількох змінних зменшується рівень наочності, тому для розуміння і усвідомлення абстрактних понять вказаного змістового модуля необхідний достатньо високий рівень розвитку просторової уяви. Покажемо, як за допомогою симуляторів можна подолати (або хоча б зменшити) вказані труднощі.

Для розробки авторських інтерактивних моделей ми обрали систему динамічної математики GeoGebra 3D. Обґрунтування такого вибору: безкоштовність та кросплатформність середовища, наявність потужного інструментарію для 3D-візуалізації в реальному часі, можливість створення інтерактивних моделей із динамічними параметрами, що дає змогу студентам досліджувати математичні об'єкти через активну взаємодію, синергія аналітичного й геометричного представлень математичних об'єктів, що є важливим для формування усвідомленого розуміння змісту цих понять.

1. Аплет «Сканування поверхні». Традиційне вивчення ліній рівня часто обмежується аналітичним розв'язанням рівняння $f(x, y) = c$ та побудовою статичних кривих на площині. Для формування усвідомленого розуміння поняття «лінія рівня» доцільно використати інтерактивний тренажер, за допомогою якого здобувач може «сканувати» поверхню. Для створення такої моделі треба: 1) побудувати поверхню; 2) побудувати площину $z = c$ і створити для c повзунок (можна від – 5 до 5 або інші значення), коли студент рухає повзунок, площина піднімається / опускається крізь поверхню; 3) за допомогою команди IntersectPath(f, z = c) побудувати переріз поверхні і площини; 4) створити проєкцію перерізу на площину XY за допомогою команди L_floor = ImplicitCurve(f(x, y) - c). Для роботи з інтерактивною моделлю можна перейти за покликанням https://www.geogebra.org/classic/bwekrnmd або відсканувати QR-код (у кінці статті табл. 2).

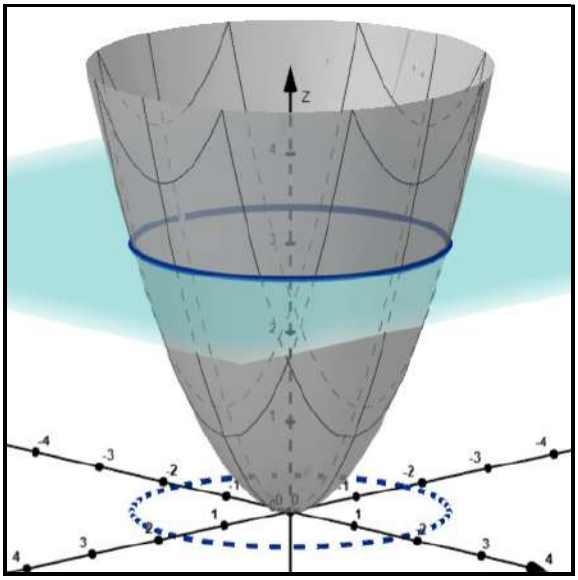

Рис. 1. Лінія рівня і її проєкція для поверхні $z = x^2 + y^2$ і $c = 3$

Змінюючи положення повзунка студент наочно спостерігає, як зміна положення січної площини приводить до трансформації лінії рівня на площині XY, що ілюструє поняття лінії рівня як проєкції відповідного перерізу (рис. 1).

Для поглиблення розуміння поняття ліній рівня доцільно продемонструвати модель складнішої поверхні, наприклад $z = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, для якої форма ліній рівня не є такою очевидною, як на попередньому рисунку. У цьому випадку студент спостерігає формування сукупності концентричних кіл, що візуально асоціюється з хвилями на воді. Це допомагає усвідомити, що проєкція лінії перетину поверхні площиною $z = c$ для заданого значення c (лінія рівня) може бути не тільки одна крива, а й сукупність кривих, що повторюють топологію поверхні (на рис.2 – це концентричні кола, зображені червоним кольором; синім – лінії перетину поверхні $z = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ площиною $z = 1$).

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

2. Аплети «Дослідження існування границі функції в точці». Одним із найскладніших для розуміння понять у курсі математичного аналізу є границя функції кількох змінних. Основна когнітивна трудність полягає в тому, що на відміну від функції однієї змінної, де точка може наближатися до точки x_0 лише з двох сторін (ліворуч та праворуч), на площині існує нескінченна множина траєкторій наближення до точки (x_0, y_0). Не враховуючи цього факту, здобувачі освіти неправомірно застосовують метод аналогій і часто розглядають лише один шлях наближення точки до граничної. Для попередження цього факту й усунення вказаних труднощів у середовищі GeoGebra 3D було розроблено інтерактивну динамічну модель, що базується на аналізі траєкторій наближення до точки (x_0, y_0) (у нашій моделі – це точка (0; 0)). Оскільки всі математичні команди та алгоритми побудови доступні для детального вивчення в панелі об'єктів (Algebra View) за покликанням https://www.geogebra.org/m/zyw9qvh2 або QR-кодом (у кінці статті табл. 2), зупинимося на ключових етапах побудови аплета: 1) побудова об'єкта дослідження – функції $f(x, y)$; 2) створення динамічних траєкторій – прямих $y = kx$ з повзунком для параметра *k*; 3) налаштування руху точок вздовж обраних шляхів з активацією опції «Залишати слід» для точок, які знаходяться на поверхні.

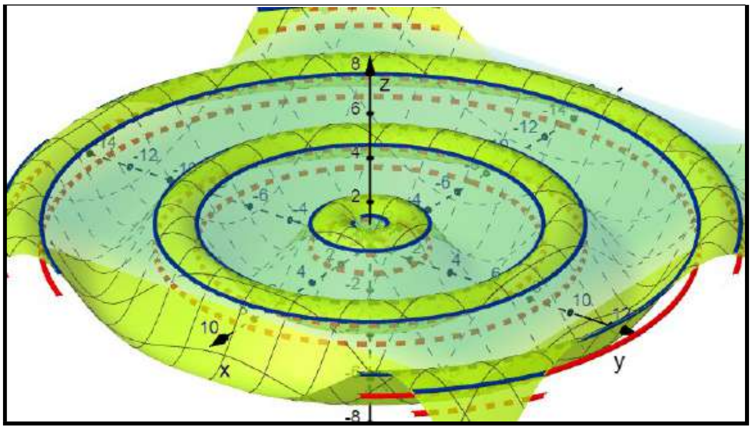

Рис. 2. Лінії рівня і їх проєкція для поверхні $z = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ для $c = 1$ (https://www.geogebra.org/3d/ku4s8he9)

Методика використання моделі будується на послідовному порівнянні тих значень, до яких наближається *z*, якщо змінювати за допомогою повзунка для параметра *k* траєкторію наближення точки по прямій $y = kx$ до точки (0; 0). Так, для *k* = 0 (наближення вздовж осі *OX*) точка *P* (зображена зеленим кольором) на поверхні рухається траєкторією з незмінною аплікатою *z* = 0. Це створює в студента первинну ілюзію існування границі в точці (0; 0): границя існує і рівна 0 (рис. 3).

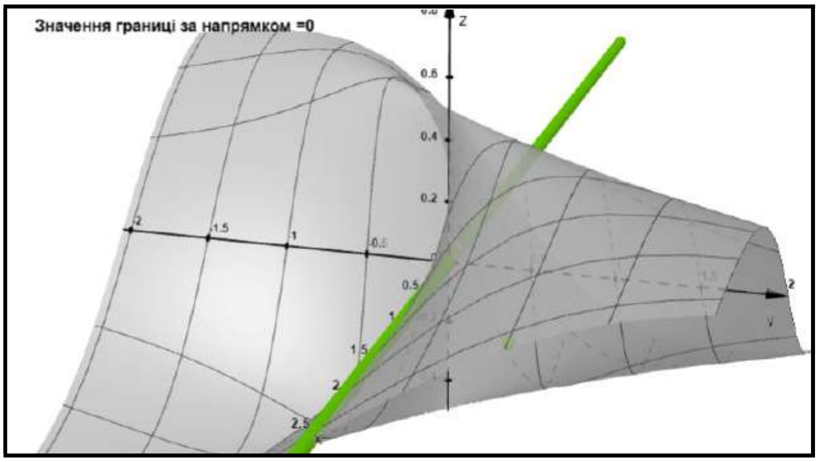

Рис. 3. Траєкторія руху точки *P* по поверхні $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ для $k = 0$

Зміна значення параметра $k=1$ (рух вздовж бісектриси $y = x$), $k=-1$ а потім миттєво змінює положення точки *P*, яка тепер «зависає» на висоті $z = 0.5$ і $z = -0.5$. Ці стрибки фіксуються в динамічному тексті «Значення границі за напрямком», створюючи когнітивний конфлікт: наближення до точки (0; 0) по різних прямих дає різні результати (рис. 4). Ураховуючи зміст теореми про єдиність границі, здобувач робить висновок, що не існує $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

На нашу думку, важливим моментом методики є використання інструменту «показати слід» для точки *P*. На рис. 5 продемонстровано результат варіювання параметра *k* при наближенні точки (0; 0). Як бачимо, незалежно від того, наскільки «близько» підходимо до точки (0;0), значення функції не наближаються до одного й того самого числа.

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

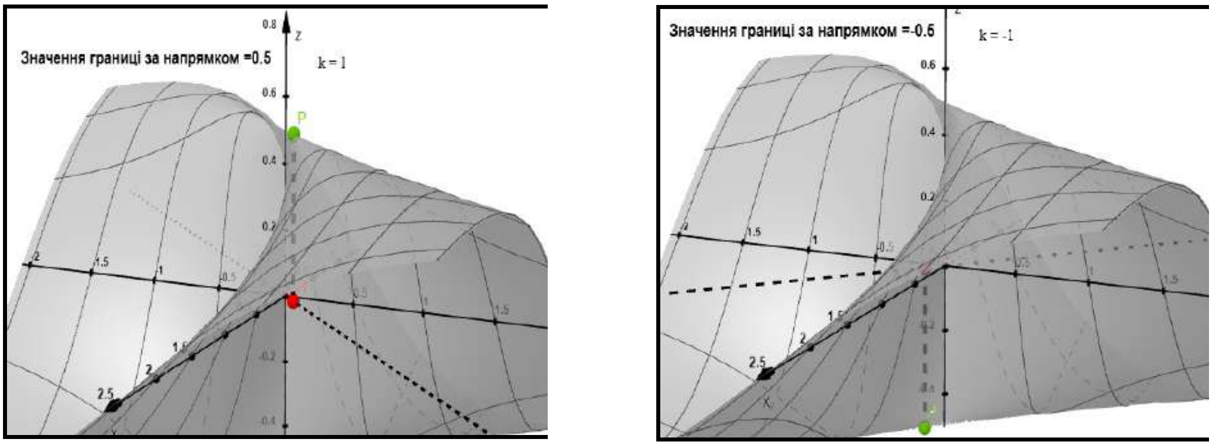

Рис. 4. Ілюстрація зміни положення точки *P*

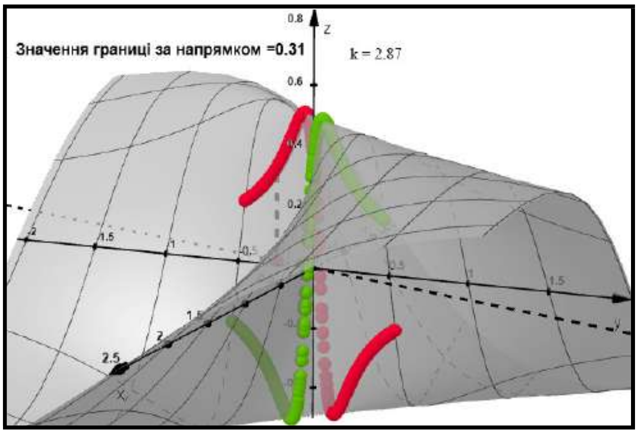

Рис. 5. Візуалізація неіснування границі функції $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ у точці (0; 0)

Особливу методичну цінність становлять функції, для яких дослідження границі вздовж будь-якої прямої $y=kx$ дає однаковий результат, що може призвести до хибного висновку про існування границі функції в точці. Наприклад, для функції $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ границя в точці (0; 0) вздовж усіх прямих $y=kx$ дорівнює 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3(kx)}{x^6+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^6+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^4+k^2}=0\,.$$

Проте інтерактивна модель (https://www.geogebra.org/m/kkpwbvse) сприяє виявленню «прихованої» поведінки функції (рис.6). Методика дослідження за допомогою розробленого аплету включає: 1) аналіз поведінки функції у випадку наближення до точки (0; 0) по прямих (студент змінює значення параметра *k* для $y=kx$ прямих і бачить, що в усіх випадках точка *P*, яка рухається по поверхні (траєкторія червоного кольору), приходить у точку (0; 0; 0). Це створює хибне враження, що границя існує і дорівнює 0; 2) зміна траєкторії на кубічну параболу (якщо точка *B* наближається до точки (0; 0) вздовж кубічної параболи $y=x^3$, то рух точки *M* відбувається вздовж «гребеня» поверхні (траєкторія помаранчевого кольору)). У цьому випадку значення функції дорівнює 0.5: $f(x,x^3)=\dfrac{x^3\cdot x^3}{x^6+(x^3)^2}=\dfrac{x^6}{2x^6}=0{,}5$. Отже, і границя функції в точці (0; 0) мала би бути рівна 0; 3) наочне розходження траєкторій у точці (0; 0) на висоту $z=0$ та $z=5$ ілюструє неіснування $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.

Застосування розроблених аплетів сприяє реалізації дослідницького підходу, за якого здобувач проходить шлях від висування гіпотези до її доведення або спростування.

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

Варто зауважити, що розроблені інтерактивні моделі мають подвійне методичне призначення: вони можуть бути використані не лише для дослідження існування границі функції кількох змінних в точці, а й для дослідження функції на неперервність у точці, оскільки одна з умов неперервності – існування границі функції в точці.

3. Аплет «Геометричний зміст частинних похідних». Для вивчення цього питання пропонуємо організувати домашню самостійну роботу здобувачів освіти, оскільки з геометричним змістом похідної функції однієї змінної студенти вже ознайомлені (за потреби знання здобувачів можна актуалізувати на відповідній лекції). Доцільно запропонувати таку інструкцію для виконання цієї роботи:

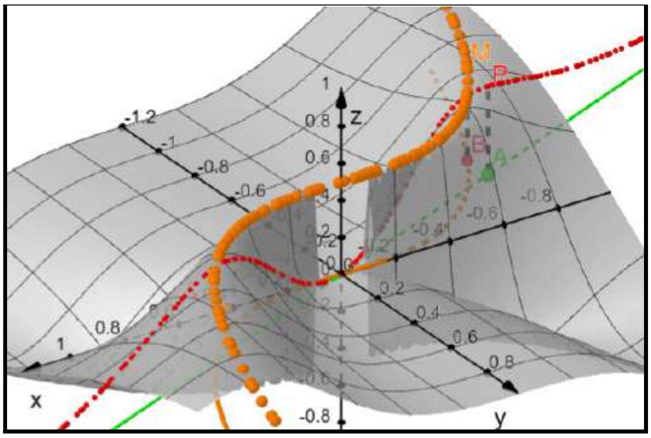

Рис. 6. Візуалізація неіснування $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$

Етап 1. Створення динамічної бази

1. Задайте функцію двох змінних**.** У рядок вводу введіть, наприклад: $f(x,\ y) = 0.5(x^2 + y^2)$. Результат – поверхня параболоїд.

2. Створіть керуючі повзунки. Створіть два повзунки x_0 та y_0 (діапазон можна взяти від – 5 до 5) для керування координатами точки.

3. Побудуйте точку A на поверхні. Введіть: A = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)). Тепер разом з рухом повзунків точка буде «ковзати» по графіку.

Етап 2. Побудова вертикального перерізу

4. Створіть січну площину. Оскільки досліджуємо геометричний зміст f'_x, то фіксуємо y. Введіть: eq1: y = y_0.

5. Отримайте криву перетину. Використайте команду: c_x = IntersectPath(f, eq1). Результат – крива (тут парабола), що лежить у вертикальній площині.

Етап 3. Побудова дотичної

6. Побудуйте напрямний вектор дотичної. Введіть: v = Vector((1, 0, k)).

7. Проведіть дотичну. Введіть: t = Line(A, v). Пряма t тепер є дотичною до кривої c_x у точці A.

Етап 4. Вимірювання

9. Побудуйте кут нахилу. Створіть допоміжну горизонтальну пряму: h = Line(A, Vector((1, 0, 0))). Оберіть інструмент «Кут» та натисніть на дотичну t і пряму h.

10. Виведіть результат на екран**.** Оберіть інструмент «Текст» і у вікні введіть: «Тангенс кута нахилу = k».

Етап 5. Обчислення і порівняння

11. Обчисліть частинну похідну заданої функції по змінній x та її значення в точці A = (x_0, y_0).

12. Порівняйте це значення зі значенням у вікні «Тангенс кута нахилу = k». Результати занесіть у таблицю 1.

Етап 6. Висновок

13. За допомогою повзунка змініть положення точки A. Повторіть зміну точки A 6 разів, записуючи результати в таблицю 1. Зробіть і запишіть висновок.

Таблиця 1

Результати вимірювань і обчислень

k	$f'_x(x\_0, y\_0)$	k	$f'_x(x\_0, y\_0)$
2	2		
Висновок:			

Етап 7. Творчий

14. Змініть пункти пропонованої інструкції так, щоб отримати аплет для ілюстрації геометричного змісту f'_y.

15. Отримавши відповідне зображення, виконайте етапи 5 і 6 цієї інструкції.

За результатами виконання пунктів 1–13 цієї інструкції здобувачі освіти мають отримати зображення (рис. 7).

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

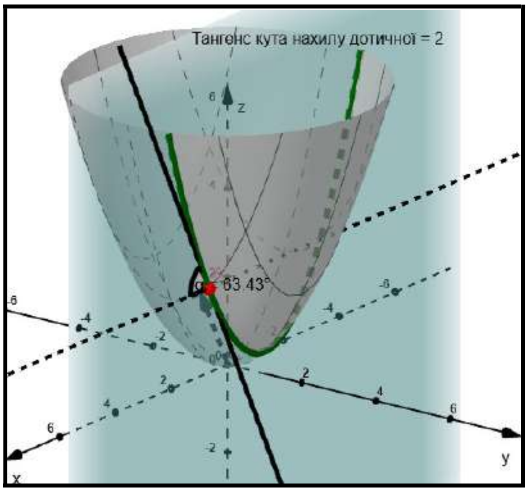

Рис. 7. Геометрична інтерпретація частинної похідної по змінній *x* функції двох змінних
(тут – $f(x, y) = 0.5(x^2 + y^2)$) (https://www.geogebra.org/3d/sa28mdua)

Такий підхід до вивчення геометричного змісту частинних похідних сприяє свідомому засвоєнню цих понять, створює підґрунтя для розуміння змісту похідної за напрямком, сприяє розвитку в студентів алгоритмічного мислення.

Аплет 4. «Дослідження існування локального екстремуму функції з параметром». Для поглиблення розуміння достатніх умов існування екстремуму та природи критичних точок функції двох змінних розроблено аплет (https://www.geogebra.org/m/sax3yvvj), що базується на дослідженні параметричного сімейства функцій вигляду $f(x,y)=x^2+ay^2$. Використання параметра *a* створює для студентів можливість спостерігати динамічну трансформацію поверхні та класифікувати критичні точки не лише аналітично, а й візуально.

Методика застосування цієї інтерактивної моделі:

1. Додатне значення параметра ($a > 0$): Здобувач встановлює повзунок у положення $a > 0$ (наприклад, $a = 1$). Поверхня – еліптичний параболоїд. Точка (0; 0; 0) візуально є «найнижчою» точкою поверхні. Здобувач висуває гіпотезу, що існує локальний мінімум в точці (0; 0) і він дорівнює 0 (рис. 8). Для підтвердження або спростування гіпотези доцільно провести аналітичні обчислення (знайти критичні точки, записати матрицю Гессе, застосувати достатні умови існування локального екстремума функції кількох змінних).

2. Вироджений випадок ($a = 0$): Разом зі зміною параметра до 0 поверхня трансформується в параболічний циліндр $z = x^2$. Здобувач спостерігає, що замість ізольованої точки мінімуму утворюється лінія «найнижчих» точок (вісь *Oy*), що візуалізує випадок, коли достатні умови не дають відповіді про наявність екстремуму (головний визначник матриці Гессе дорівнює нулю) (рис. 9).

3. Від'ємне значення параметра ($a < 0$): Подальше зменшення параметра (наприклад, $a = -1$) приводить до того, що поверхня набуває форми гіперболічного параболоїда («сідла»). Хоча в точці (0; 0) частинні похідні дорівнюють нулю, наочно видно, що в одному напрямку функція зростає, а в іншому – спадає. Це дає чітке геометричне пояснення поняттю «сідлова точка» (рис. 10).

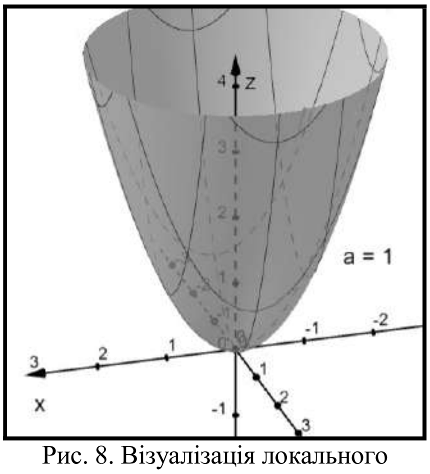

Рис. 8. Візуалізація локального мінімуму для $a = 1$ (еліптичний параболоїд)

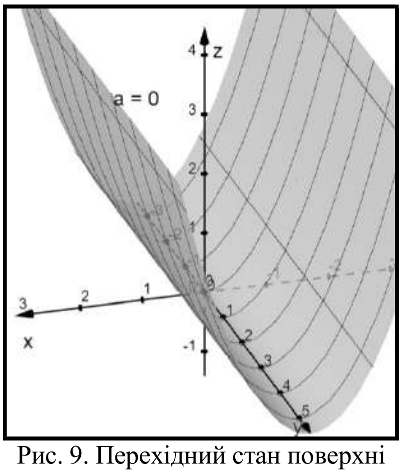

Рис. 9. Перехідний стан поверхні для $a = 0$ (параболічний циліндр)

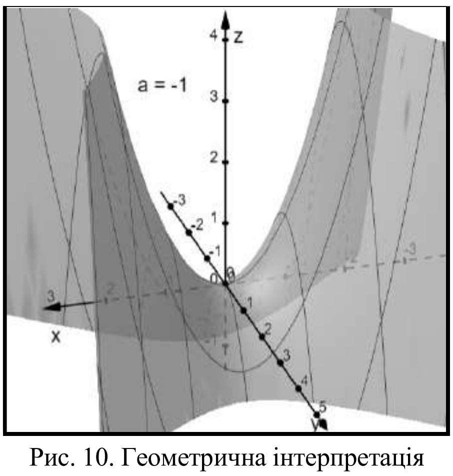

Рис. 10. Геометрична інтерпретація «сідлової» точки для $a = -1$ (гіперболічний параболоїд)

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

Головне призначення цього аплета – демонстрація того, як зміна значення параметра *a* впливає на вигляд поверхні та, відповідно, на наявність, тип або кількість критичних точок відповідної функції. Здобувач перестає бути пасивним обчислювачем і стає дослідником, який може «керувати» формою об’єкта.

Запропоновані інтерактивні моделі було апробовано в освітньому процесі під час викладання курсу математичного аналізу здобувачам вищої освіти Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка. Апробація здійснювалася у форматі пілотного впровадження в межах аудиторних занять і самостійної роботи студентів та супроводжувалася педагогічним спостереженням за особливостями їхньої навчальної діяльності. Отримані результати мають описовий характер і засвідчують зростання навчальної активності студентів, підвищення рівня їхньої залученості до дослідницької роботи та покращення розуміння абстрактних математичних об’єктів.

Висновки. У статті обґрунтовано можливість і доцільність використання інтерактивних моделей у середовищі GeoGebra 3D як ефективного засобу забезпечення концептуального розуміння диференціального числення функцій кількох змінних. Проведене дослідження спонукає до таких висновків:

- *Подолання формалізму*. Встановлено, що за допомогою інтерактивної візуалізації можна трансформувати абстрактні математичні об’єкти (границя в точці, лінії рівня, частинні похідні, локальні екстремуми) у наочні динамічні образи. Це сприяє переходу від механічного виконання алгоритмів до усвідомленого розуміння геометричної та фізичної сутності цих математичних об’єктів.

- *Методична цінність розроблених моделей*. Описані в роботі алгоритми побудови аплетів («Сканування поверхні», «Дослідження існування границі функції в точці», «Геометричний зміст частинних похідних», «Дослідження існування локального екстремуму функції з параметром») створюють умови для реалізації дослідницького підходу. Здобувач освіти перестає бути пасивним спостерігачем і стає активним дослідником, який через варіювання параметрів та спостереження за зворотним зв’язком системи самостійно формує стійкі когнітивні зв’язки.

- *Універсальність та адаптивність***.** Запропонована методика використання інтерактивних моделей може бути легко адаптована до інших розділів математичного аналізу та суміжних дисциплін. Робота з такими моделями не лише поглиблює предметні знання, а й сприяє розвитку цифрової компетентності майбутніх фахівців, що є критично важливим у сучасному високотехнологічному освітньому просторі.

Перспективи подальших досліджень полягають у: дослідженні впливу застосування цих аплетів на якість й успішність навчання, на мотивацію здобувачів освіти, на їхнє ставлення до вивчення диференціального числення функції кількох змінних; розробці комплексного електронного навчального курсу з математичного аналізу, побудованого на системному використанні інтерактивних динамічних моделей для візуалізації абстрактних математичних об’єктів.

Запропонований підхід не лише розширює інструментарій викладання математичного аналізу, а й створює передумови для переосмислення способів формування концептуального розуміння абстрактних математичних понять у здобувачів освіти. Результати дослідження можуть бути основою для подальшого розвитку технологій візуалізації в навчанні інших розділів вищої математики.

Таблиця 2

Перелік інтерактивних моделей для підтримки вивчення диференціального числення функцій кількох змінних

Назва розробки	QR-код	GeoGebra 3D
Сканування поверхні_1		https://www.geogebra.org/classic/bwekrnmd
Сканування поверхні_2		https://www.geogebra.org/3d/ku4s8he9
Дослідження існування границі функції в точці_1		https://www.geogebra.org/m/zyw9qvh2
Дослідження існування границі функції в точці_2		https://www.geogebra.org/m/kkpwbvse

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

Геометричний зміст частинних похідних		https://www.geogebra.org/3d/sa28mdua
Дослідження існування локального екстремуму функції з параметром		https://www.geogebra.org/m/sax3yvvj

Список використаної літератури

1. Torres-Peña R. C., Peña-González D., Chacuto-López E., Ariza E. A., Vergara D. Updating Calculus Teaching with AI: A Classroom Experience. *Education Sciences*. 2024. 14(9), 1019. DOI: https://doi.org/10.3390/educsci14091019.

2. Harahap F. S., Susetyarini E., Purwanti E., Fitri S., Rukman N. K., Pohan H. M. PhET simulation in education: A bibliometric analysis of the Scopus database. *Research and Development in Education (RaDEn)*. 2025. 5(1), 555–570. DOI: https://doi.org/10.22219/raden.v5i1.40504.

3. Álvarez-Siordia F. M., Merino-Sot C., Rosas-Meléndez S. A., Pérez-Díaz M., Chans G. M. Simulators as an Innovative Strategy in the Teaching of Physics in Higher Education. *Education Sciences.* 2025. 15(2), 131. DOI: https://doi.org/10.3390/educsci15020131.

4. Семеніхіна О. Теорія і практика формування професійної готовності майбутніх учителів математики до використання засобів комп’ютерної візуалізації математичних знань : дис. … д-ра пед. наук : 13.00.04. Суми, 2017.

5. Семеніхіна О., Білошапка Н. Про використання вчителями математики засобів комп’ютерної візуалізації. *Гуманізація навчально-виховного процесу*. 2018. № 1 (87). С. 289–301. DOI: https://doi.org/10.31865/2077-1827.1(87)2018.140455.

6. Коваль Т., Бесклінська О. Використання засобів візуалізації для створення електронних освітніх ресурсів у процесі навчання математичних дисциплін у закладах вищої освіти. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2020. Т. 77, № 3, С. 145–161. DOI: 10.33407/itlt.v77i3.3411.

7. Оленюк О., Семенишена Р., Дуганець В. Ефективність використання віртуальних симуляторів у STEM-освіті. *Сучасна освіта України: проблеми, досвід, перспективи*, 2024. С. 115–123. DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-422-1-12.

8. Kefalis C., Skordoulis C., Drigas A. Digital Simulations in STEM Education: Insights from Recent Empirical Studies, a Systematic Review. *Encyclopedia*. 2025. 5(1). 10. DOI: https://doi.org/10.3390/encyclopedia5010010

9. Sierpinska A. Understanding in Mathematics. London: The Falmer Press, 1994.

10. Кугай Н. В., Каліниченко М. М. Формування вмінь майбутніх учителів математики застосовувати метод аналогій у процесі навчання дисциплін математичного спрямування. *Фізико-математична освіта*. 2019. Вип. 1. С. 88–94. DOI: 10.31110/2413-1571-2019-019-1-014.

METHODOLOGY OF USING GEOGEBRA 3D INTERACTIVE MODELS AS A MEANS OF PROVIDING CONCEPTUAL UNDERSTANDING OF DIFFERENTIAL CALCULUS OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Kuhai Nataliia
Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physical and Mathematical Education and Informatics
Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University

Introduction. *The integration of digital technologies into higher education is becoming more widespread every year, especially in disciplines that require complex conceptual understanding and dynamic visualization, such as mathematical analysis. Traditional methods of teaching differential calculus of functions of several variables often focus on formal-symbolic calculations, leaving out the geometric and conceptual essence of concepts. This leads to a significant gap between the learner's ability to perform algorithmic actions and their real understanding of mathematical objects in three-dimensional space. The lack of dynamic visualization hinders the formation of a holistic image of complex mathematical constructions.*

Purpose. *To justify the expediency of using interactive models when studying the differential calculus of functions of several variables, describe the algorithms for developing such models in the GeoGebra 3D environment, and reveal the methodology of their use to ensure students' conceptual understanding of the essence of mathematical objects.*

Methods. *A complex of scientific methods was used in the work: analysis of psychological, pedagogical, and methodical literature to clarify the state of the problem; modeling to create interactive applets in the GeoGebra 3D environment; methodical generalization to develop practical recommendations for their implementation in the educational process of higher education institutions.*

Results. *The article describes in detail the methodology of working with four types of authors' interactive models. The first model, «Surface Scanning,» allows students to investigate level lines not as static formulas, but as a*

ISSN 2410-0897 (Print)
ISSN 3041-1289 (Online)

result of a surface section by planes and subsequent projection onto the Oxy plane. The second group of models is dedicated to the study of the function limit at a point. Thanks to dynamic trajectories, learners see that the limit exists only if they approach the same number regardless of the path. A case of «cognitive conflict» is described, where approaching along straight lines gives one result, and along a cubic parabola — another. The third model reveals the geometric meaning of partial derivatives through the visualization of surface sections by planes x=const and y=const. The fourth model demonstrates the study of local extrema with a parameter. It is emphasized that these models can be effectively applied during the study of other fundamental concepts of mathematical analysis. The proposed approach not only expands the teaching toolkit but also creates prerequisites for rethinking the ways of forming conceptual understanding of abstract concepts in learners.

Originality. *The scientific novelty lies in the development of specific algorithms for creating interactive 3D models focused on the systematic overcoming of epistemological obstacles in the study of mathematical analysis. Unlike existing approaches, the proposed methodology emphasizes the dynamic transformation of the model by the students themselves, which ensures the transition from procedural knowledge to a conceptual understanding of the essence of objects.*

Conclusion. *It has been established that the use of interactive models in the GeoGebra 3D environment is an effective means of providing conceptual understanding of the differential calculus of functions of several variables. The proposed methodology allows overcoming formalism in knowledge by creating a cognitive bridge between the abstract symbol and geometric intuition. The described algorithms for constructing applets create conditions for implementing a research approach where the learner independently forms stable cognitive connections. The results of the study can serve as a basis for the further development of visualization technologies in teaching other sections of higher mathematics. It is recommended to implement dynamic modeling as a mandatory element of lectures and practical classes in higher education institutions.*

Keywords: *GeoGebra 3D, interactive models, differential calculus, functions of several variables, conceptual understanding, dynamic visualization, mathematics teaching methodology.*

References

1. Torres-Peña, R. C., Peña-González, D., Chacuto-López, E., Ariza, E. A., & Vergara, D. (2024). Updating Calculus Teaching with AI: A Classroom Experience. *Education Sciences*, 14(9), 1019. https://doi.org/10.3390/educsci14091019 [in English].
2. Harahap, F. S., Susetyarini, E., Purwanti, E., Fitri, S., Rukman, N. K., & Pohan, H. M. (2025). PhET simulation in education: A bibliometric analysis of the Scopus database. *Research and Development in Education (RaDEn)*, 5(1), 555–570. https://doi.org/10.22219/raden.v5i1.40504 [in English].
3. Álvarez-Siordia, F. M., Merino-Soto, C., Rosas-Meléndez, S. A., Pérez-Díaz, M., & Chans, G. M. (2025). Simulators as an Innovative Strategy in the Teaching of Physics in Higher Education. *Education Sciences*, 15(2), 131. https://doi.org/10.3390/educsci15020131 [in English].
4. Semenikhina, O. (2017). *Teoriia i praktyka formuvannia profesiinoi hotovnosti maibutnikh uchyteliv matematyky do vykorystannia zasobiv kompiuternoi vizualizatsii matematychnykh znan* [Theory and practice of formation of professional readiness of future mathematics teachers to use tools of computer visualization of mathematical knowledge]. [Doctoral dissertation, Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko.]. [in Ukrainian].
5. Semenikhina, O., & Biloshapka, N. (2018). Pro vykorystannia vchyteliamy matematyky zasobiv kompiuternoi vizualizatsii [On the use of computer visualization tools by mathematics teachers]. *Humanizatsiia navchalno-vykhovnoho protsesu – Humanization of the educational process*, (1), 289-301. https://doi.org/10.31865/2077-1827.1(87)2018.140455 [in Ukrainian].
6. Koval, T., & Besklinska, O. (2020). Vykorystannia zasobiv vizualizatsii dlia stvorennia elektronnykh osvitnikh resursiv u protsesi navchannia matematychnykh dystsyplin u zakladakh vyshchoi osvity [Use of visualization tools to create electronic educational resources in the process of teaching mathematical disciplines in higher education institutions]. *Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia – Information Technologies and Learning Tools*, 77(3), 145-161. https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3411 [in Ukrainian].
7. Oleniuk, O., Semenyshena, R., & Duhanets, V. (2024). Efektyvnist vykorystannia virtualnykh symuliatoriv u STEM-osviti [Effectiveness of using virtual simulators in STEM education]. *Suchasna osvita Ukrainy: problemy, dosvid, perspektyvy – Modern Education of Ukraine: Problems, Experience, Prospects*, 115-123. https://doi.org/10.30525/978-9934-26-422-1-12 [in Ukrainian].
8. Kefalis, C., Skordoulis, C., & Drigas, A. (2025). Digital Simulations in STEM Education: Insights from Recent Empirical Studies, a Systematic Review. *Encyclopedia*, 5(1), 10. https://doi.org/10.3390/encyclopedia5010010 [in English].
9. Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press. [in English].
10. Kuhai, N. V., & Kalinichenko, M. M. (2019). Formuvannia vmin maibutnikh uchyteliv matematyky zastosovuvaty metod analohii u protsesi navchannia dystsyplin matematychnoho spriamuvannia [Formation of the abilities of future mathematics teachers to apply the method of analogies in the process of teaching mathematical disciplines]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, (1), 88-94. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-019-1-014 [in Ukrainian].

Отримано редакцією 10.02.2026 р.
Прийнято редакцією 10.03.2026 р.
Опубліковано 6.04.2026 р.